

Higgs와 Unitarity

이 강의노트를 통해 여러분이 아셨으면 하는 것들은 다음과 같습니다.

- Higgs boson이 gauge boson에 질량을 주는 역할을 하고, 동시에 Physics의 unitarity를 위해 필수적으로 존재해야 하는 입자라는 것.
- Goldstone Equivalence theorem을 어떻게 사용하는지 이해하는 것.

위 점들은 Lee, Quigg, Thacker [3] 에 의해 연구되었습니다. 당시 저자들은 이를 통해 (당시 실험적으로 발견되지 않은) Higgs의 질량이 약 1TeV보다 낮아야 함을 이론적으로 알아내었습니다.¹ 이 paper는 또한 Goldstone equivalence theorem의 실용성을 잘 보여주는 paper이기도 합니다.

Notation/Glossary

- Metric convention: $\eta_{\mu\nu} : (+, -, -, -)$
- Feynman Rule: coupling에 i 를 붙이는 notation을 사용합니다. 최종 amplitude는 $i\mathcal{M}$ 입니다.
 - 예: $\mathcal{L} \supset -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 \rightarrow -i\lambda$
 - ∂_μ 가 붙는 Derivative interaction의 경우, ingoing momentum이면 $(-ip_\mu)$, outgoing momentum이면 $(+ip_\mu)$ factor가 붙습니다. (당연히, ∂^μ 면 $\pm ip^\mu$ 입니다.)
- COM: Center of momentum (frame)
- $d\Pi$: Phase space integral factor, 대충 $\frac{d^3p_i}{2E_i(2\pi)^3}$ 들의 곱.

1 Unitarity Bound

QFT에서 계산하게 되는 amplitude \mathcal{M} 은 주어진 과정이 일어날 확률밀도를 의미합니다. 이 값이 확률과 관련된 만큼, \mathcal{M} 은 몇몇가지 제약조건을 따릅니다. Unitarity bound는 그러한 제약 조건 중 하나로, \mathcal{M} 값이 특정 값을 넘을 수 없음을 제시합니다.

$2 \rightarrow 2$ scattering process를 고려해 봅시다. COM frame에서 이 산란과정은 2차원 평면 위에 나타낼 수 있고, 따라서 산란과정 그 자체 및 이와 연관된 물리량들은 rotational invariance: 산란 확률이 collision axis를 중심으로 한 회전에 대해 불변합니다. 즉, scattering amplitude \mathcal{M} 이 scattering angle θ 에 의존한다는 의미죠.² 이러한 rotational invariance 덕분에 \mathcal{M} 은 Legendre Polynomial $P_j(\cos \theta)$ 들을 통해 전개할 수 있습니다.

$$\mathcal{M}(\theta) = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} a_j (2j+1) P_j(\cos \theta) \quad (1)$$

¹논문 [3]이 1977년에 발표되었음에 주목. 이 땀 심지어 W, Z boson조차 발견되지 않았습니.

²더 구체적으로는 Mandelstam s 와 t (scattering angle에 대응함)에만 의존합니다.

2 → 2 scattering process에 대응하는 scattering cross-section은 다음과 같습니다.³

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{32\pi s} \int d\cos\theta |\mathcal{M}|^2 = \frac{8\pi}{s} \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j a_k^* (2j+1)(2k+1) \int d\cos\theta P_j(\cos\theta) P_k(\cos\theta) \\ &= \frac{16\pi}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j|^2\end{aligned}\quad (2)$$

이제 optical theorem에 대해 알아볼 차례입니다. Scattering matrix $\mathcal{S} = 1 + i\mathcal{T} = 1 + i(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathbb{M}$ 의 unitarity는 다음을 암시합니다.

$$\begin{aligned}1 &= \mathcal{S}\mathcal{S}^\dagger = (1 + i\mathcal{T})(1 - i\mathcal{T}^\dagger) = 1 + i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^\dagger) + \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger \\ -i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^\dagger) &= \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger : (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) (\mathbb{M} - \mathbb{M}^\dagger) = (2\pi)^8 [\delta^4(\Sigma p)]^2 \mathbb{M}\mathbb{M}^\dagger \\ -i(\mathbb{M} - \mathbb{M}^\dagger) &= (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathbb{M}\mathbb{M}^\dagger\end{aligned}\quad (3)$$

잠깐! 지금 이 식에서의 \mathcal{S} , \mathcal{T} , 그리고 \mathbb{M} 는 모두 행렬임에 조심하세요! 우리가 일반적으로 QFT에서 계산하는 amplitude \mathcal{M} 과는 $\mathcal{M}(i \rightarrow f) = \langle f | \mathbb{M} | i \rangle$ 관계를 가집니다. 따라서 식 (3)은 다음과 같이 해석되어야 합니다.

$$-i(\langle f | \mathbb{M} | i \rangle - \langle f | \mathbb{M} | i \rangle^*) = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \langle f | \mathbb{M} | X \rangle \langle X | \mathbb{M} | i \rangle\quad (4)$$

여기서 X 는 가능한 모든 final state로, 따라서 X 에 대한 summation은 phase space integral로 해석할 수 있습니다.

$$\sum_X (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \langle f | \mathbb{M} | X \rangle \langle X | \mathbb{M} | i \rangle \rightarrow \sum_X \int d\Pi_X (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \langle f | \mathbb{M} | X \rangle \langle X | \mathbb{M} | i \rangle\quad (5)$$

이제 special case: two particle initial state 및 $|i\rangle = |f\rangle$ 인 경우를 고려하면 식 (5)이 cross-section과 연결됨을 알 수 있습니다.⁴

$$\sum_X \int d\Pi_X (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathcal{M}(i \rightarrow X) = 4p\sqrt{s} \sum_X \int d\sigma(i \rightarrow X) = 4p\sqrt{s} \sigma_{\text{tot}}\quad (6)$$

(여기서 p 는 COM frame에서의 incident momentum입니다.) 또한 이 경우 $-i\langle i | (\mathbb{M} - \mathbb{M}^\dagger) | i \rangle = 2\text{Im } \mathcal{M}(i \rightarrow i)$ 입니다. 따라서,

$$\text{Im } \mathcal{M}(i \rightarrow i) = 2p\sqrt{s} \sigma_{\text{tot}}\quad (7)$$

위 식을 optical theorem이라고 합니다.

이제 앞서 수행한 partial wave decomposition과 optical theorem을 조합해봅시다. 식 (7)의 좌변에 식 (1), 우변을 약간 바꾼 후 식 (2)을 대입해봅시다. ($i \rightarrow i$ scattering의 경우 scattering angle이 0, 즉 $\cos\theta = 1$ 이니 $P_j(1) = 1$ 임을 참조.)

$$\begin{aligned}\text{Im } \mathcal{M}(i \rightarrow i) &= 2p\sqrt{s} \sigma_{\text{tot}} \geq 2p\sqrt{s} \sigma_{2 \rightarrow 2} \rightarrow 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im } a_j \geq 32\pi \frac{p}{\sqrt{s}} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j|^2 \\ &\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \left[\text{Im } a_j - 2 \frac{p}{\sqrt{s}} |a_j|^2 \right] \geq 0\end{aligned}\quad (8)$$

이제 엄밀하진 않지만, 실용적인 식을 얻기 위해 두가지를 가정합니다. 첫번째 가정은 각 j 값에 대해 $\text{Im } a_j - 2 \frac{p}{\sqrt{s}} |a_j|^2$ 가 성립한다는 가정입니다. 두번째 가정은 초고에너지 scattering을 가정하는 것입니다. 이 경우 $2 \frac{p}{\sqrt{s}} \rightarrow$

³ $\int d\cos\theta P_j(\cos\theta) P_k(\cos\theta) = \frac{2\delta_{jk}}{2j+1}$ 참조.

⁴ CM frame에서 $d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4p\sqrt{s}} d\Pi$ 임을 참조.

1이 됩니다. 두번째 가정은 어느 UV complete theory든지 간에 우리가 scattering energy를 무한히 높일 수 있다는 점에서 적절한 가정이며, 또한 뒤에서 그러한 limit을 다룰 것 입니다.

이제, 초고에너지 scattering에서의 각 partial wave amplitude prefactor a_j 에 대해 다음이 성립합니다.

$$\text{Im } a_j \geq |a_j|^2 \quad (9)$$

위 inequality는 다음을 강제합니다.⁵

$$|a_j| \leq 1 \quad (10)$$

이 식이 우리가 뒤에서 중요하게 써먹을 수식입니다.

ϕ^4 theory: $\mathcal{L} = -\phi(\square + m^2)\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ 를 예시로 들어봅시다. 물론 어느 interacting theory든지 간에 perturbation expansion이 정당화되기 위해 interaction strength(여기서는 λ)가 충분히 작아야 되지만 이 부분은 차치해 두고, unitarity만에 의해 가능한 λ 값이 다음과 같이 제약됨을 알 수 있습니다.

$$\mathcal{M} = \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} a_j (2j+1) P_j(\cos \theta) \quad (11)$$

ϕ^4 theory의 경우 amplitude가 angular dependency를 가지지 않으니 $P_j = P_0 \delta_{0j}$ 입니다.

$$\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) = 16\pi a_0 \leq 16\pi \quad (12)$$

따라서, unitarity에 의해 $\lambda \leq 16\pi$ 여야 함을 알 수 있습니다.⁶

2 Higgs mechanism

여기서는 Spontaneous symmetry breaking에 의해 gauge boson이 질량을 얻는 과정에 대해 다시 다뤄보고자 합니다. 일반적으로 이 과정에서 goldstone boson이 gauge boson에게 잡아먹혔다고 하는데, 이것이 무엇을 의미하는지 알아보려고 하는 것이 목표입니다.

다음과 같은 Lagrangian을 다뤄봅시다. 여기서 $F_{\mu\nu}$ 는 U(1) symmetry에 대응하는 gauge boson이고, φ 는 이 U(1)에 charge된 complex scalar particle입니다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_\mu\varphi|^2 - V(\varphi) \quad (13)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad V(\varphi) = -\mu^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4 \quad (14)$$

φ 를 다음으로 expansion해봅시다.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1 + i\phi_2) \quad \left(v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \right) \quad (15)$$

⁵ $a_j = R + iI$ 에 대해,

$$I \geq R^2 + I^2 \geq I^2 \rightarrow |I| \geq |I^2| \rightarrow 1 \geq |I|$$

⁶이 논의에서는 크게 관계 없습니다만, λ 가 1보다 클 수 있고 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ term이 음수일 수도 있지 않는데 이 항을 무시할 수 있는가에 의해 약간 이야기하자면, $2 \rightarrow 2$ process에서 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ correction은 loop에 의해 이루어지고, 보통 loop-involved amplitude는 16π 를 능가하는 $(16\pi^2)^{-1}$ factor에 의해 suppress된다는 점과, 적어도 ϕ^4 theory에서는 $\mathcal{O}(\lambda^2)$ correction이 양수라는 점만 언급하겠습니다.

정말 열심히 하면 다음을 얻을 수 있습니다.⁷

$$\mathcal{L} = \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2A_\mu^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 - \frac{2\lambda v^2}{2}\phi^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 \right) + qvA_\mu\partial^\mu\phi_2$$

+ (interaction terms)

보다싶이, complex scalar의 symmetry breaking에 의해 gauge field A_μ 가 qv 만큼의 질량을 얻었으며, massless Goldstone boson ϕ_2 가 나타납니다. 문제는 정체불명의 2차항 $qvA_\mu\partial^\mu\phi_2$ 입니다: 이는 두 field A_μ 와 ϕ_2 사이 mass mixing처럼 보이며, 따라서 제거해줄 필요가 있습니다.

이것의 제거는 gauge fixing을 통해 이루어집니다. 구체적으로, 다음 gauge fixing term을 추가해봅시다.

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu - \xi qv\phi_2)^2 = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + qv\phi_2\partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\xi(qv)^2\phi_2^2 \quad (16)$$

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{gf}} = \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(qv)^2A_\mu^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 - \frac{2\lambda v^2}{2}\phi^2 \right) + \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\xi(qv)^2\phi_2^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \cancel{qv\partial^\mu(A_\mu\phi_2)} + (\text{interaction terms}) \quad (17)$$

Gauge fixing term을 추가함으로써, 문제의 2차항은 total derivative가 됨으로서 사라지고, Goldstone boson ϕ_2 는 gauge dependent mass $\xi(qv)^2$ 를 가지게 됩니다.

그러면 'Goldstone boson이 gauge boson에게 잡아먹힌다'는 표현은 뭘까요? 그건 physical observable이 gauge independent하다는 점에 기반해 $\xi \rightarrow \infty$ 인 unitary gauge를 잡는다는 의미입니다. 이 경우 ϕ_2 는 무한히 큰 질량을 가지며, 따라서 A_μ 와 ϕ_1 의 dynamics에 아무런 영향을 끼치지 못합니다. 즉, 이를 무시하고 physics를 다뤄도 상관 없다는 의미이죠. 물론, ξ 가 무한대가 아닌 다른 gauge를 잡을 수도 있고, 이 경우에는 gauge field의 dynamics에 ϕ_2 를 고려해야겠지요. 그런 gauge를 잡을 필요성이 있을까요? 사실, 이게 Goldstone equivalence theorem의 핵심입니다.

아마 몇몇 분들은 $\varphi = \frac{1}{2}(v + \phi_1)$ 로 expansion을 해보신 경험이 있을 것 입니다. 이는 phi_2 를 무시한 expansion으로, 당연히 ϕ_2 가 없는 limit: unitary gauge와 똑같은 결과를 얻게 됩니다.

위 논의는 non-abelian theory에서도 동일합니다. Standard model에서는 세개의 Goldstone boson이 나오고, $\xi \rightarrow \infty$ 인 unitary gauge를 잡음으로서 이들이 무한대의 질량을 가지면서 사라지죠. 하지만 non-abelian이기 때문에 크게 달라지는 점이 한가지 있는데, 바로 non-abelian (SU(2)등) field에 charged particle들은 모두 같은 charge, 즉 같은 interaction strength를 가진다는 것 입니다.

이 점이 왜 중요하냐? 암흑물질을 다루시는 분들이라면 dark photon model같은 것을 들어보셨을 겁니다. Dark photon의 mass가 새로운 dark Higgs로부터 유래한다면 dark Higgs 역시 DM-SM사이 portal로 작용할 수 있을 것 입니다. 하지만 많은 Dark photon analysis에서 dark Higgs에 의한 영향은 잘 고려되지 않습니다. 이는 dark Higgs ϕ_1 의 질량을 매우 높임으로서 정당화시킬 수 있습니다. 즉, VEV v 가 충분히 높아져야 하고 dark Higgs의 charge q 가 (dark matter의 dark photon에 대한 charge에 비해) 매우 낮다 가정하는 겁니다. 하지만 non-abelian theory의 경우, dark matter와 dark higgs가 둘 다 dark photon에 charge된다면 이 둘은 같은 coupling을 가져야만 하므로, 위와 같은 회피에는 어려움이 있습니다.

7

(interaction terms) = $qA_\mu(\phi_1\partial^\mu\phi_2 - \phi_2\partial^\mu\phi_1) + \frac{q^2}{2}A_\mu^2(2v\phi_1 + \phi_1^2 + \phi_2^2) - \lambda v\phi_1^3 - \lambda v\phi_1\phi_2^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$

3 WWWW Scattering

SM Lagrangian for EW and Higgs Boson

이제 이 강의의 main point, standard model을 다뤄봅시다. Quark를 무시한 Electroweak Lagrangian은 다음과 같습니다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(W_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}^2 + (D_\mu H)^\dagger(D^\mu H) - \mu^2 H^\dagger H - \lambda(H^\dagger H)^2 \quad (18)$$

$$D_\mu H \equiv \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}gW_\mu^i\tau^i - \frac{i}{2}g'B_\mu \right) H$$

일단 Goldstone boson을 고려하지 않고 일을 진행해봅시다. 즉, $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}$ 를 대입한다는 것 이죠. $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ process와 관련된 interaction Lagrangian은 다음과 같습니다. [1]⁸

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & ig \cos \theta_w [(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)W_\mu^+ W_\nu^- - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)Z_\mu W_\nu^- + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)Z_\mu W_\nu^+] \\ & + ie[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)W_\mu^+ W_\nu^- - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)A_\mu W_\nu^- + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)A_\mu W_\nu^+] \\ & + \frac{g^2}{2}(W_\mu^+ W_\mu^+ W_\nu^- W_\nu^- - W_\mu^+ W_\mu^- W_\nu^- W_\nu^+) \\ & + gm_W h W_\mu^+ W_\mu^- \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g} \rightarrow \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (20)$$

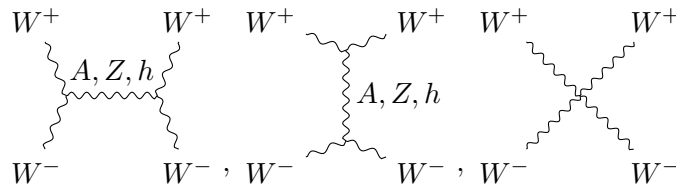
$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (22)$$

$$m_W = \frac{gv}{2}, \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_w} = \frac{m_W}{\cos \theta_w} = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2} \quad (23)$$

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \quad (24)$$

Tree-level에서는 다음 7개 diagram들이 $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$ process에 기여합니다.



Polarization of External Gauge Bosons

이제 WWWW scattering amplitude를 계산해봅시다! 먼저 이 경우에는 scattering amplitude가 external polarization에 의해 결정된다는 점을 기억해야 합니다. 그리고 그 polarization vector를 얻기 위해서는 scattering kinematics에 대해 약간 알아야 하죠. xz plane위에서의 COM frame를 생각해봅시다.(그림 1을 참조하세요.)

각 gauge boson의 4-momentum은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= (E, 0, 0, p), & p_2^\mu &= (E, 0, 0, -p), \\ p_3^\mu &= (E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta), & p_4^\mu &= (E, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta) \end{aligned} \quad (25)$$

⁸이 책은 Lorentz index의 상하 위치를 엄밀하게 고려하지 않습니다.

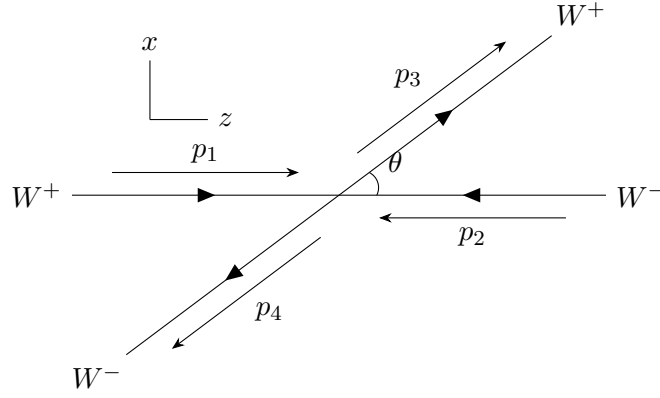


Figure 1: WWWW Scattering

각 4-momentum에 대응하는 polarization vector는 다음과 같죠. ($\epsilon(k) \cdot k = 0$, $\epsilon_i(k) \cdot \epsilon_j(k) = -\delta_{ij}$ 조건에 의해 결정됩니다.)

$$\begin{aligned} \epsilon_1^\mu(p_1) &= (0, 1, 0, 0), & \epsilon_2^\mu(p_1) &= (0, 0, 1, 0), & \epsilon_L^\mu(p_1) &= \frac{1}{m_W}(p, 0, 0, E) \\ \epsilon_1^\mu(p_2) &= (0, 1, 0, 0), & \epsilon_2^\mu(p_2) &= (0, 0, 1, 0), & \epsilon_L^\mu(p_2) &= \frac{1}{m_W}(p, 0, 0, -E) \\ \epsilon_1^\mu(p_3) &= (0, \cos \theta, 0, -\sin \theta), & \epsilon_2^\mu(p_3) &= (0, 0, 1, 0), & \epsilon_L^\mu(p_3) &= \frac{1}{m_W}(p, E \sin \theta, 0, E \cos \theta) \\ \epsilon_1^\mu(p_4) &= (0, \cos \theta, 0, -\sin \theta), & \epsilon_2^\mu(p_4) &= (0, 0, 1, 0), & \epsilon_L^\mu(p_4) &= \frac{1}{m_W}(p, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta) \end{aligned}$$

자, Longitudinal polarization에 momentum과 energy가 들어가는 것이 보일 것 입니다. 앞선 unitarity 논의에 따르면 scattering amplitude는 어느 에너지든지 간에 특정 값보다 낮아야 하는데, Longitudinal polarization이면 에너지가 높아질수록 amplitude의 세기가 커질 것 처럼 보이는군요? 이것이 핀포인트입니다. 앞으로 우리는 모든 external W boson들이 longitudinal polarization인 경우를 다룰 것 입니다.

이후 amplitude를 Lorentz invariant quantity인 Mandelstam variable로 기술할 것으로, E, p, θ 와 s, t 사이 관계는 다음과 같습니다.

$$E^2 = \frac{s}{4}, \quad p^2 = E^2 - m_W^2 = \frac{s}{4} - m_W^2, \quad \cos \theta = 1 + \frac{t}{2p^2} = 1 + \frac{2t}{s - 4m_W^2} \quad (26)$$

Mandelstam으로의 치환은 Mathematica를 사용했습니다.

Amplitude without Higgs - s -channel

이제 본격적으로 $W_L W_L \rightarrow W_L W_L$ amplitude를 계산할 것 입니다. 특히, Higgs의 역할을 강조하기 위해 Higgs를 무시할 것 입니다.

계산하기 전에 한가지 유의할 점. 우리는 지금 암묵적으로 Unitary gauge를 사용하고 있습니다. 이 gauge에서의 Z propagator는 다음과 같습니다.

$$i\Pi^{\mu\nu} = \frac{-i}{p^2 - m_Z^2} \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m_Z^2} \right) \quad (27)$$

Photon과 Z boson에 의해 매개되는 s -channel amplitude의 계산 과정은 다음과 같습니다. (답으로 건너뛰려면

Eq. (33) 참조.) 여기서 $\epsilon_L^\alpha(p_i) \rightarrow \epsilon_1^\alpha$ 로 표기하고, $k = p_1 + p_2$ 입니다.

$$i\mathcal{M}_{s,AZ} = \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} \left[\eta^{\mu\nu} (p_3 - p_4)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (k + p_4)^\mu - \eta^{\lambda\mu} (p_3 + k)^\nu \right] \left[(ie)^2 \frac{-ig_{\lambda\gamma}}{s} + (ig \cos \theta_W)^2 \frac{-i}{s - m_Z^2} \left(g_{\lambda\gamma} - \frac{k_\lambda k_\gamma}{s} \right) \right] \left[\eta^{\alpha\beta} (p_1 - p_2)^\gamma + \eta^{\beta\gamma} (k + p_2)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha} (p_1 + k)^\beta \right] \quad (28)$$

$k_\lambda k_\gamma$ 에 비례하는 항들은 다음 이유로 0입니다. ($k = p_3 + p_4$ 및 $\epsilon(q) \cdot q = 0$ 도 참조.)

$$\begin{aligned} (p_3 - p_4)^\lambda k_\lambda &= p_3^2 - p_4^2 = 0 \\ \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} (\eta^{\nu\lambda} (k + p_4)^\mu - \eta^{\lambda\mu} (p_3 + k)^\nu) k_\lambda &= \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} (k^\nu (k + p_4)^\mu - k^\mu (p_3 + k)^\nu) \\ &= (\epsilon_3^* \cdot (k + p_4)) (\epsilon_4^* \cdot k) - (\epsilon_3^* \cdot k) (\epsilon_4^* \cdot (k + p_3)) = (\epsilon_3^* \cdot 2(p_4)) (\epsilon_4^* \cdot p_3) - (\epsilon_3^* \cdot p_4) (\epsilon_4^* \cdot (2p_3)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eq. (28)는 이제 다음과 같이 정리됩니다. $\epsilon(q) \cdot q = 0$ 가 다시 사용되었습니다.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{s,AZ} &= i \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \left[\eta^{\alpha\beta} (p_1 - p_2)^\gamma + \eta^{\beta\gamma} (k + p_2)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha} (p_1 + k)^\beta \right] \\ &\quad \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} \left[\eta^{\mu\nu} (p_3 - p_4)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (k + p_4)^\mu - \eta^{\lambda\mu} (p_3 + k)^\nu \right] \\ &= i \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \left[\eta^{\alpha\beta} (p_1 - p_2)^\gamma + 2\eta^{\beta\gamma} p_2^\alpha - 2\eta^{\gamma\alpha} p_1^\beta \right] \\ &\quad \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} \left[\eta^{\mu\nu} (p_3 - p_4)^\lambda + 2\eta^{\nu\lambda} p_4^\mu - 2\eta^{\lambda\mu} p_3^\nu \right] \\ &= i \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \left[(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) (p_1 - p_2)^\gamma + 2\epsilon_2^\gamma (\epsilon_1 \cdot p_2) - 2\epsilon_1^\gamma (\epsilon_2 \cdot p_1) \right] \\ &\quad \left[(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) (p_3 - p_4)^\lambda + 2\epsilon_4^{*\lambda} (\epsilon_3^* \cdot p_4) - 2\epsilon_3^{*\lambda} (\epsilon_4^* \cdot p_3) \right] \quad (29) \end{aligned}$$

이제 $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)$ 와 같은 Lorentz invariant products들을 아래와 같이 치환해봅시다.

$$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) = (\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) = \frac{p^2 + E^2}{m_W^2} \quad (30)$$

$$(\epsilon_1 \cdot p_2) = (\epsilon_2 \cdot p_1) = (\epsilon_3 \cdot p_4) = (\epsilon_4 \cdot p_3) = \frac{2pE}{m_W} \quad (31)$$

위를 Eq. (29)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{s,AZ} &= \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \left[\frac{p^2 + E^2}{m_W^2} (p_1 - p_2)^\gamma + \frac{4pE}{m_W} (\epsilon_2^\gamma - \epsilon_1^\gamma) \right] \\ &\quad \left[\frac{p^2 + E^2}{m_W^2} (p_3 - p_4)^\lambda + \frac{4pE}{m_W} (\epsilon_4^{*\lambda} - \epsilon_3^{*\lambda}) \right] \\ &= \frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] \left[(p^2 + E^2) (p_1 - p_2)^\lambda + 4m_W p E (\epsilon_2^\lambda - \epsilon_1^\lambda) \right] \\ &\quad \left[(p^2 + E^2) (p_3 - p_4)^\lambda + 4m_W p E (\epsilon_4^{*\lambda} - \epsilon_3^{*\lambda}) \right] \quad (32) \end{aligned}$$

이제 아래 식들을 사용합니다.

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4) &= -4p^2 \cos \theta \\ (\epsilon_2^\lambda - \epsilon_1^\lambda) \cdot (p_3 - p_4) &= (\epsilon_4^{*\lambda} - \epsilon_3^{*\lambda}) \cdot (p_1 - p_2) = \frac{4Ep}{m_W} \cos \theta \\ (\epsilon_2^\lambda - \epsilon_1^\lambda) \cdot (\epsilon_4^{*\lambda} - \epsilon_3^{*\lambda}) &= -\frac{4E^2}{m_W^2} \cos \theta \end{aligned}$$

Eq. (32)에 대입하면 아래를 얻습니다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{s,AZ} &= \frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] \\
&\times \left[(p^2 + E^2)^2 (-4p^2 \cos \theta) + 4m_W p E (p^2 + E^2) \frac{8Ep}{m_W} \cos \theta + 16m_W^2 p^2 E^2 \left(-\frac{4E^2}{m_W^2} \cos \theta \right) \right] \\
&= \frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] [-4p^2(p^2 + E^2)^2 + 32E^2 p^2 (p^2 + E^2) - 64p^2 E^4] \cos \theta \\
&= -\frac{4}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{s} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] p^2 (p^2 - 3E^2)^2 \cos \theta \\
\mathcal{M}_{s,AZ} &= -\frac{g^2}{4m_W^4} \left[\frac{\sin^2 \theta_W}{s} + \frac{\cos^2 \theta_W}{s - m_Z^2} \right] (s + 2m_W^2)^2 (s + 2t - 4m_W^2) \quad (33)
\end{aligned}$$

High energy limit of amplitude - part 1

다음 amplitude를 계산하기 전에 먼저 Eq. (33)의 고에너지 limit에 대해 살펴봅시다. $s \gg m_Z^2$ 인 초고에너지 limit에서, $\frac{1}{s - m_Z^2} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{m_Z^2}{s} + \frac{m_Z^4}{s^2} + \dots \right)$ 와 같습니다. 따라서, $\mathcal{M}_{s,AZ}$ 은 다음과 같이 s 와 t 에 대한 polynomial로 전개할 수 있습니다. (특히, $s^n t^m$ 에 대해 $n + m \geq 0$ 인 부분에 집중할 것 입니다.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{s,AZ} &\approx -\frac{g^2}{4m_W^4} \left[\frac{\sin^2 \theta_W}{s} + \frac{\cos^2 \theta_W}{s} + \frac{\cos^2 \theta_W m_Z^2}{s^2} + \frac{\cos^2 \theta_W m_Z^4}{s^3} \right] \\
&\times (s^3 + 2s^2 t + 8m_W^2 s t - 12m_W^4 s + 8m_W^4 t - 16m_W^6) \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{g^2}{4m_W^4} \left[1 + \frac{m_W^2}{s} + \frac{m_W^2 m_Z^2}{s^2} \right] \left(s^2 + 2st + 8m_W^2 t - 12m_W^4 + 8m_W^4 \frac{t}{s} \right) \\
&\approx -\frac{g^2}{4m_W^4} \left(s^2 + m_W^2 s + m_W^2 m_Z^2 + 2st + 2m_W^2 t + 2m_W^2 m_Z^2 \frac{t}{s} \right. \\
&\quad \left. + 8m_W^2 t + 8m_W^4 \frac{t}{s} - 12m_W^4 + 8m_W^4 \frac{t}{s} \right) \\
\mathcal{M}_{s,AZ} &\approx -\frac{g^2}{4m_W^4} \left(s^2 + 2st + m_W^2 (s + 10t) + m_W^2 (m_Z^2 - 12m_W^2) + 2m_W^2 (m_Z^2 + 8m_W^2) \frac{t}{s} \right) \quad (35)
\end{aligned}$$

Leading order가 $\mathcal{O}(s^2)$ 네요. Unitarity를 고려할 때 이는 위험한 behaviour입니다. Amplitude는 아무리 에너지가 올라가도 특정 값보다 낮아야 하기 때문이죠.

t -channel Amplitude

Photon과 Z boson에 의해 매개되는 t -channel amplitude의 계산 과정은 다음과 같습니다. (답으로 건너뛰려면 Eq. (49) 참조.)

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{t,AZ} &= \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} [\eta^{\alpha\mu} (p_1 + p_3)^\gamma + \eta^{\mu\gamma} (k - p_3)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha} (k + p_1)^\mu] \\
&\quad \left[(ie)^2 \frac{-ig_{\lambda\gamma}}{t} + (ig \cos \theta_W)^2 \frac{-i}{t - m_Z^2} \left(g_{\lambda\gamma} - \frac{k_\lambda k_\gamma}{s} \right) \right] \\
&\quad \left[-\eta^{\beta\nu} (p_2 + p_4)^\lambda + \eta^{\nu\lambda} (k + p_4)^\beta + \eta^{\lambda\beta} (p_2 - k)^\nu \right] \quad (36)
\end{aligned}$$

다시, $k_\lambda k_\gamma$ 에 비례하는 항은 0입니다.

$$\begin{aligned}
&\epsilon_1^\alpha \epsilon_3^{*\mu} [\eta^{\alpha\mu} (p_1 + p_3)^\gamma + \eta^{\mu\gamma} (k - p_3)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha} (k + p_1)^\mu] k_\gamma \\
&= (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) (p_1 + p_3) \cdot (p_1 - p_3) + (\epsilon_3^* \cdot k) \epsilon_1 \cdot (k - p_3) - (\epsilon_1 \cdot k) \epsilon_3^* \cdot (k + p_1) \\
&= 0 + (\epsilon_3^* \cdot p_1) \epsilon_1 \cdot (-2p_3) - (\epsilon_1 \cdot (-p_3)) \epsilon_3^* \cdot (2p_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{t,AZ} &= \epsilon_1^\alpha \epsilon_3^{*\mu} [\eta^{\alpha\mu}(p_1 + p_3)^\gamma + \eta^{\mu\gamma}(k - p_3)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha}(k + p_1)^\mu] \\
&\quad \left[(ie)^2 \frac{-i}{t} + (ig \cos \theta_W)^2 \frac{-i}{t - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \\
&\quad \epsilon_2^\beta \epsilon_4^{*\nu} \left[-\eta^{\beta\nu}(p_2 + p_4)^\lambda + \eta^{\nu\lambda}(k + p_4)^\beta + \eta^{\lambda\beta}(p_2 - k)^\nu \right]
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
&= i\epsilon_1^\alpha \epsilon_3^{*\mu} [\eta^{\alpha\mu}(p_1 + p_3)^\gamma + \eta^{\mu\gamma}(k - p_3)^\alpha - \eta^{\gamma\alpha}(k + p_1)^\mu] \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] g_{\lambda\gamma} \\
&\quad \epsilon_2^\beta \epsilon_4^{*\nu} \left[-\eta^{\beta\nu}(p_2 + p_4)^\lambda + \eta^{\nu\lambda}(k + p_4)^\beta + \eta^{\lambda\beta}(p_2 - k)^\nu \right]
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{t,AZ} &= \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] \epsilon_1^\alpha \epsilon_3^{*\mu} [\eta^{\alpha\mu}(p_1 + p_3)^\gamma - 2\eta^{\mu\gamma} p_3^\alpha - 2\eta^{\gamma\alpha} p_1^\mu] g_{\lambda\gamma} \\
&\quad \epsilon_2^\beta \epsilon_4^{*\nu} \left[-\eta^{\beta\nu}(p_2 + p_4)^\lambda + 2\eta^{\nu\lambda} p_4^\beta + 2\eta^{\lambda\beta} p_2^\nu \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(p_1 + p_3)^\gamma - 2\epsilon_3^{*\gamma}(\epsilon_1 \cdot p_3) - 2\epsilon_1^\gamma(\epsilon_3^* \cdot p_1)] g_{\lambda\gamma} \\
&\quad \left[-(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*)(p_2 + p_4)^\lambda + 2\epsilon_4^{*\lambda}(\epsilon_2 \cdot p_4) + 2\epsilon_2^\lambda(\epsilon_4^* \cdot p_2) \right]
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(p_1 + p_3)^\lambda - 2\epsilon_3^{*\lambda}(\epsilon_1 \cdot p_3) - 2\epsilon_1^\lambda(\epsilon_3^* \cdot p_1)] \\
&\quad \left[(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*)(p_2 + p_4)^\lambda - 2\epsilon_4^{*\lambda}(\epsilon_2 \cdot p_4) - 2\epsilon_2^\lambda(\epsilon_4^* \cdot p_2) \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

Lorentz invariant contraction들을 대입.

$$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) = (\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) = \frac{p^2 - E^2 \cos \theta}{m_W^2} \tag{42}$$

$$(\epsilon_1 \cdot p_3) = (\epsilon_3^* \cdot p_1) = (\epsilon_2 \cdot p_4) = (\epsilon_4^* \cdot p_2) = \frac{Ep(1 - \cos \theta)}{m_W} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{t,AZ} &= - \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] \left[\frac{p^2 - E^2 \cos \theta}{m_W^2} (p_1 + p_3)^\lambda - \frac{2Ep(1 - \cos \theta)}{m_W} (\epsilon_3^{*\lambda} + \epsilon_1^\lambda) \right] \\
&\quad \left[\frac{p^2 - E^2 \cos \theta}{m_W^2} (p_2 + p_4)^\lambda - \frac{2Ep(1 - \cos \theta)}{m_W} (\epsilon_4^{*\lambda} + \epsilon_2^\lambda) \right] \\
&= - \frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] \left[(p^2 - E^2 \cos \theta)(p_1 + p_3)^\lambda - 2m_W Ep(1 - \cos \theta)(\epsilon_3^{*\lambda} + \epsilon_1^\lambda) \right] \\
&\quad \left[(p^2 - E^2 \cos \theta)(p_2 + p_4)^\lambda - 2m_W Ep(1 - \cos \theta)(\epsilon_4^{*\lambda} + \epsilon_2^\lambda) \right]
\end{aligned} \tag{44}$$

또 다른 Lorentz invariant contraction들을 대입.

$$(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4) = 4E^2 + 2p^2(1 + \cos \theta) \tag{45}$$

$$(p_1 + p_3) \cdot (\epsilon_4^* + \epsilon_2) = (p_2 + p_4) \cdot (\epsilon_3^* + \epsilon_1) = \frac{2Ep}{m_W} (3 + \cos \theta) \tag{46}$$

$$(\epsilon_3^* + \epsilon_1) \cdot (\epsilon_4^* + \epsilon_2) = \frac{1}{m_W^2} (4p^2 + 2E^2(1 + \cos \theta)) \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{t,AZ} &= -\frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] \\
&\quad \left[(p^2 - E^2 \cos \theta)^2 (4E^2 + 2p^2(1 + \cos \theta)) - 4m_W Ep(1 - \cos \theta)(p^2 - E^2 \cos \theta) \frac{2Ep}{m_W} (3 + \cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + 4m_W^2 E^2 p^2 (1 - \cos \theta)^2 \frac{1}{m_W^2} (4p^2 + 2E^2(1 + \cos \theta)) \right] \\
&= -\frac{1}{m_W^4} \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] \left[(p^2 - E^2 \cos \theta)^2 (4E^2 + 2p^2(1 + \cos \theta)) \right. \\
&\quad \left. - 8E^2 p^2 (1 - \cos \theta)(p^2 - E^2 \cos \theta)(3 + \cos \theta) + 4E^2 p^2 (1 - \cos \theta)^2 (4p^2 + 2E^2(1 + \cos \theta)) \right] \tag{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4m_W^4 (s - 4m_W^2)^2} \left[\frac{e^2}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t - m_Z^2} \right] (s^2 t^2 (2s + t) - 8m_W^2 s^2 t (s + 3t) \\
&\quad + 4m_W^4 s (2s^2 + 21st + 20t^2) - 16m_W^6 s (5s + 14t) + 64m_W^8 (4s + t) - 256m_W^{10}) \tag{49}
\end{aligned}$$

High energy limit of amplitude - part 2

이번에도 역시 고에너지 limit을 생각해봅시다. 이는 $t = p^2 \cos \theta$ 이니 고에너지 limit에서는 $|t|$ 역시 m_W^2 보다 충분히 클 것이라는 것으로 정당화 될 수 있죠.

$$\frac{1}{t - m_Z^2} \approx \frac{1}{t} + \frac{m_Z^2}{t^2} + \frac{m_Z^4}{t^3} \tag{50}$$

$$\frac{1}{(s - 4m_W^2)^2} \approx \frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{4m_W^2}{s} + \frac{16m_W^4}{s^2} + \dots \right)^2 \approx \frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right) \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{t,AZ} \\
&\approx -\frac{1}{4m_W^4} \frac{1}{s^2} \left[1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right] \left[\frac{g^2 \sin^2 \theta_W}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W}{t} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W m_Z^2}{t^2} + \frac{g^2 \cos^2 \theta_W m_Z^4}{t^3} \right] \\
&\quad (s^2 t^2 (2s + t) - 8m_W^2 s^2 t (s + 3t) + 4m_W^4 s (2s^2 + 21st + 20t^2) - 16m_W^6 s (5s + 14t) + \mathcal{O}(s, t)) \\
&= -\frac{g^2}{4m_W^4} \frac{1}{s^2 t} \left[1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right] \left[1 + \frac{m_W^2}{t} + \frac{m_W^2 m_Z^2}{t^2} \right] \\
&\quad (s^2 t^2 (2s + t) - 8m_W^2 s^2 t (s + 3t) + 4m_W^4 s (2s^2 + 21st + 20t^2) + \mathcal{O}(s^2, st, t^2)) \tag{52}
\end{aligned}$$

앞서 s -channel의 결과와 마찬가지로 $\frac{\mathcal{O}(s^2, st, t^2)}{s^2 t}$ 보다 작은 항은 무시합니다.

$$\begin{aligned}
-\frac{4m_W^4}{g^2} \mathcal{M}_{t,AZ} &\approx \left[1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right] \left[1 + \frac{m_W^2}{t} + \frac{m_W^2 m_Z^2}{t^2} \right] \\
&\quad \left(t(2s+t) - 8m_W^2(s+3t) + 4m_W^4 \left(2\frac{s}{t} + 21 + 20\frac{t}{s} \right) \right) \\
&\approx \left[1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{m_W^2}{t} + \frac{48m_W^4}{s^2} + \frac{8m_W^4}{st} + \frac{m_W^2 m_Z^2}{t^2} \right] \\
&\quad \left(t(2s+t) - 8m_W^2(s+3t) + 4m_W^4 \left(2\frac{s}{t} + 21 + 20\frac{t}{s} \right) \right) \\
&\approx \left[t(2s+t) - 8m_W^2(s+3t) + 4m_W^4 \left(2\frac{s}{t} + 21 + 20\frac{t}{s} \right) \right. \\
&\quad \left. + m_W^2 \left(\frac{8}{s} + \frac{1}{t} \right) (t(2s+t) - 8m_W^2(s+3t)) + m_W^4 \left(\frac{48}{s^2} + \frac{8}{st} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{1}{t^2} \right) (t(2s+t)) \right] \\
&\approx t^2 + 2st + m_W^2 \left(-6s - 7t + 8\frac{t^2}{s} \right) + m_W^4 \left(12 - \frac{8t}{s} + \frac{48t^2}{s^2} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} + 2\frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} \right) \quad (53)
\end{aligned}$$

4-point Amplitude

이제 4-point amplitude를 계산해봅시다. (답으로 건너뛰려면 Eq. (59) 참조.)

$$i\mathcal{M}_4 = ig^2 \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} [2g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}] \quad (54)$$

$$\mathcal{M}_4 = g^2 [2(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*)] \quad (55)$$

Lorentz invariant contraction들은 다음과 같습니다.

$$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) = (\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*) = \frac{p^2 + E^2}{m_W^2} \quad (56)$$

$$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*) = (\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*) = \frac{p^2 - E^2 \cos \theta}{m_W^2} \quad (57)$$

$$(\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^*) = (\epsilon_2 \cdot \epsilon_3^*) = \frac{p^2 + E^2 \cos \theta}{m_W^2} \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_4 &= \frac{g^2}{m_W^4} [2(p^2 + E^2 \cos \theta)^2 - (p^2 - E^2 \cos \theta)^2 - (p^2 + E^2)^2] \\
&= \frac{g^2}{4m_W^4} \frac{s}{(s - 4m_W^2)^2} (s^3 + 4s^2 t + st^2 - 4m_W^2(3s^2 + 7st) + 48m_W^4(s+t) - 64m_W^6) \quad (59)
\end{aligned}$$

High energy limit of amplitude - part 3

앞과 마찬가지로 amplitude Eq. (59)의 high energy limit을 고려해봅시다.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 &\approx \frac{g^2}{4m_W^4} \frac{s}{s^2} \left(1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right) \\ &\quad (s^3 + 4s^2t + st^2 - 4m_W^2(3s^2 + 7st) + 48m_W^4(s+t) - 64m_W^6) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{g^2}{4m_W^4} \left(1 + \frac{8m_W^2}{s} + \frac{48m_W^4}{s^2} \right) \\ &\quad \left(s^2 + 4st + t^2 - 4m_W^2(3s + 7t) + 48m_W^4 \left(1 + \frac{t}{s} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \right) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4 &\approx s^2 + 4st + t^2 + m_W^2 \left(-12s - 28t + 8s + 32t + 8\frac{t^2}{s} \right) \\ &\quad + m_W^4 \left(48 + 192\frac{t}{s} + 48\frac{t^2}{s^2} - 96 - 224\frac{t}{s} + 48 + 48\frac{t}{s} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\approx s^2 + 4st + t^2 + m_W^2 \left(-4s + 4t + 8\frac{t^2}{s} \right) + m_W^4 \left(16\frac{t}{s} + 48\frac{t^2}{s^2} \right) \quad (63)$$

High Energy Limit Amplitude without Higgs

이 중간단계에서, Higgs를 무시한 채 세 amplitude: Eq. (35), (53), (63)의 합을 계산해봅시다.⁹

$$\begin{aligned} &\frac{4m_W^4}{g^2} \mathcal{M}' \quad (64) \\ &= \frac{4m_W^4}{g^2} (\mathcal{M}_{s,AZ} + \mathcal{M}_{t,AZ} + \mathcal{M}_4) \\ &\approx - \left(s^2 + 2st + m_W^2(s + 10t) + m_W^2(m_Z^2 - 12m_W^2) + 2m_W^2(m_Z^2 + 8m_W^2)\frac{t}{s} \right) \\ &\quad - \left(t^2 + 2st + m_W^2 \left(-6s - 7t + 8\frac{t^2}{s} \right) + m_W^4 \left(12 - \frac{8t}{s} + \frac{48t^2}{s^2} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} + 2\frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} \right) \right) \\ &\quad + s^2 + 4st + t^2 + m_W^2 \left(-4s + 4t + 8\frac{t^2}{s} \right) + m_W^4 \left(16\frac{t}{s} + 48\frac{t^2}{s^2} \right) \\ &= [- (s^2 + 2st) - (t^2 + 2st) + s^2 + 4st + t^2] \\ &\quad + m_W^2 \left[- (s + 10t) + \left(6s + 7t - 8\frac{t^2}{s} \right) + \left(-4s + 4t + 8\frac{t^2}{s} \right) \right] \\ &\quad + m_W^4 \left[- \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} - 12 \right) - 2 \left(\frac{m_Z^2}{m_W^2} + 8 \right) \frac{t}{s} - \left(12 - \frac{8t}{s} + \frac{48t^2}{s^2} + \frac{m_Z^2}{m_W^2} + 2\frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} \right) + \left(16\frac{t}{s} + 48\frac{t^2}{s^2} \right) \right] \\ &\frac{4m_W^4}{g^2} \mathcal{M}' = m_W^2(s+t) + m_W^4 \left(-2\frac{m_Z^2}{m_W^2} - 2\frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \left(8 - 2\frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) \end{aligned} \quad (65)$$

다행히도(?) 맨 처음에서 봤던 $\mathcal{M} \sim \mathcal{O}(s^2)$ behaviour는 사라졌습니다. s, t , 4-point를 합치니 이들이 cancel되었다는 것이죠. 하지만, amplitude는 아직 $\mathcal{M} \sim \mathcal{O}(s) + \mathcal{O}(t)$ behaviour를 보이며, 여전히 unitarity를 violate합니다.

⁹물리적으로 이는 $m_H \gg s \gg m_{W,Z}$ 인 limit에 대응합니다.

Higgs Amplitude

이제 마지막 조각, Higgs에 의한 $WWWW$ amplitude 기여분을 고려할 차례입니다. Higgs에 의해 매개되는 s 및 t -channel amplitude는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_h &= (igm_W)^2 \epsilon_1^\alpha \epsilon_2^\beta \epsilon_3^{*\mu} \epsilon_4^{*\nu} \left[g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{i}{s - m_h^2} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \frac{i}{t - m_h^2} \right] \\ &= -ig^2 m_W^2 \left[\frac{(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^*)}{s - m_h^2} + \frac{(\epsilon_1 \cdot \epsilon_3^*)(\epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*)}{t - m_h^2} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} &= -ig^2 m_W^2 \left[\frac{1}{s - m_h^2} \frac{(p^2 + E^2)^2}{m_W^4} + \frac{1}{t - m_h^2} \frac{(p^2 - E^2 \cos \theta)^2}{m_W^4} \right] \\ &= -\frac{ig^2}{m_W^2} \left[\frac{1}{s - m_h^2} \frac{(s - 2m_W^2)^2}{4} + \frac{1}{t - m_h^2} \frac{(st + 2m_W^2 s - 8m_W^4)^2}{4(s - 4m_W^2)^2} \right] \\ \mathcal{M}_h &= -\frac{g^2}{4m_W^2} \left[\frac{(s - 2m_W^2)^2}{s - m_h^2} + \frac{(st + 2m_W^2 s - 8m_W^4)^2}{(t - m_h^2)(s - 4m_W^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (67)$$

High energy limit of amplitude - part 4

Eq. (67)의 high-energy limit ($s \gg m_h^2$)은 다음과 같습니다. 역시, $s^0 t^0$ order까지만 전개합니다.

$$\begin{aligned} &-\frac{4m_W^2}{g^2} \mathcal{M}_h \\ &\approx \left[\frac{1}{s} \left(1 + \frac{m_h^2}{s} \right) (s - 2m_W^2)^2 + \frac{1}{s^2 t} \left(1 + \frac{m_h^2}{t} \right) \left(1 + \frac{8m_W^2}{s} \right) (st + 2m_W^2 s - 8m_W^4)^2 \right] \\ &\approx s + t + 2m_h^2 + 8m_W^2 \frac{t}{s} \end{aligned} \quad (68)$$

Divergence Cancellation due to Higgs

이제, Eq. (68)이 Eq. (65)의 divergence를 precise하게 cancel함을 보일 수 있습니다!

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}' + \mathcal{M}_h \\ &= \frac{g^2}{4m_W^4} \left(m_W^2 (s + t) + m_W^4 \left(-2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} - 2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \left(8 - 2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) \right) \right) \\ &\quad - \frac{g^2}{4m_W^2} \left(s + t + 2m_h^2 + 8m_W^2 \frac{t}{s} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t} \right) \\ &= -\frac{g^2}{2m_W^2} m_h^2 + \frac{g^2}{4} \left(-2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} - 2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \left(8 - 2 \frac{m_Z^2}{m_W^2} \right) - 8 \frac{t}{s} \right) \\ &= -\frac{g^2}{2m_W^2} m_h^2 - \frac{g^2}{2} \frac{m_Z^2}{m_W^2} \left(1 + \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

보시다시피, Higgs에 의해 amplitude가 $\mathcal{O} \sim (s^n t^m)$ ($n+m = 0$)와 같은 행동거지를 보입니다. 즉, 이제 energy가 커져도 amplitude가 diverge하지 않는다는 것 이죠.

4 Lee-Quigg-Thacker Bound [3]

이제 Eq. (69)에 Unitarity bound Eq. (10)를 적용해봅시다.

먼저 Eq. (69)에 $t = \frac{1}{2}(s - 4m_W^2)(\cos \theta - 1)$ 및 $\frac{m_Z^2}{m_W^2} = \sec^2 \theta_w$ 를 대입합니다.

$$\mathcal{M} \approx -\frac{g^2}{2m_W^2} m_h^2 - \frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_w} \left(1 - \frac{2s}{(s - 4m_W^2)(1 - \cos \theta)} - \frac{(s - 4m_W^2)(1 - \cos \theta)}{2s} \right) \quad (70)$$

여기서는 $l = 0$ 인, $\cos \theta$ independent한 part에 집중하고자 합니다. 이를 위해 $(1 - \cos \theta) = 1 + \cos \theta + \dots$ 를 사용합니다.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\approx -\frac{g^2}{2m_W^2}m_h^2 - \frac{g^2}{2\cos^2\theta_w} \left(1 - \frac{2s}{(s-4m_W^2)} - \frac{(s-4m_W^2)}{2s} \right) + \mathcal{O}(\cos\theta) \\ &\sim -\frac{g^2}{2m_W^2}m_h^2 - \frac{3}{2} \frac{g^2}{2\cos^2\theta_w} = 16\pi a_0 \end{aligned} \quad (71)$$

(이 과정에서 $\mathcal{O}(m_W^2/s)$ correction도 무시했습니다.) 이제, $a_0 \leq 1$ 이므로 다음 식이 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

$$\frac{1}{32\pi} \frac{g^2}{m_W^2} m_h^2 < \frac{1}{16\pi} \left(\frac{g^2}{2m_W^2} m_h^2 + \frac{3g^2}{4\cos^2\theta_w} \right) \leq 1 \quad (72)$$

(가장 왼쪽은 $\frac{3g^2}{4\cos^2\theta_w}$ 가 양수이기 때문.) 따라서 Higgs mass에 대해 다음 bound가 성립합니다.

$$m_h < \sqrt{32\pi} \frac{m_W}{g} \quad (73)$$

역사적으로, Lee, Quigg, Thacker가 위 bound를 유도했을 땐 W boson의 mass도 electroweak coupling g 값도 알려지지 않았습니다. 그러나, 이들의 조합 g/m_W 는 Fermi constant로 매우 잘 알려져 있었습니다.¹⁰

$$G_F = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{g^2}{m_W^2} \simeq 1.1166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (74)$$

$$\frac{1}{16\pi} \frac{4\sqrt{2}}{2} G_F m_h^2 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi} G_F m_h^2 \leq 1 \rightarrow m_h \leq \sqrt{\frac{4\pi}{\sqrt{2}}} G_F^{-1/2} \simeq 1234.56 \text{ GeV} \quad (75)$$

5 Goldstone Equivalence Theorem

실제 Lee, Quigg, Thacker가 제안한 bound는 initial state가 W, Z, A, h 네 particle의 superposed state로부터 계산되었습니다.

$$m_h^2 \leq \frac{8\pi\sqrt{2}}{3G_F} \simeq 1008.0 \text{ GeV} \quad (76)$$

즉 그분들은 다른 scattering process, $WZ \rightarrow WZ$ 같은 것들도 계산했다는 의미죠.

유감스럽지만 이걸 사람이 할 짓이 아닙니다. Kinematics가 $AA \rightarrow AA$ 에서 $AB \rightarrow AB$ 가 되는 것만으로 복잡해집니다. 당장 $\epsilon_1 \cdot \epsilon_3 = \frac{pp' - E^2 \cos\theta}{m_A m_B}$ 로, 다뤄야 할 momentum값이 두개가 되는 시점에서 일이 극도로 복잡해집니다. 게다가 $AB \rightarrow AB$ 가 다가 아닙니다. $WW \rightarrow Z\gamma$ 같은 process도 고려할 수 있습니다. 다뤄야 할 momentum이 3개라는 뜻이죠. 이걸 진짜 사람이 할 짓이 아닙니다.

매우 다행히도, Goldstone Equivalence theorem이라는 workaround가 있습니다. 여기서는 Goldstone Equivalence theorem를 증명하는 대신, 직접 예시를 들어가면서 설명해보고자 합니다.

Lagrangian in Feynman-'t Hooft Gauge

앞선 section에서는 $\xi \rightarrow \infty$ 인 unitary gauge를 사용했습니다. 이번에는 unitary gauge 대신 $\xi = 1$ 인 Feynman-'t Hooft Gauge를 사용해봅시다. 이 경우, $H = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}\phi^+)$ 를 대입해야 합니다. 또한 (abelian의 경우에서 gauge fixing term에 의한 goldstone boson의 질량이 $\sqrt{\xi}m_A$ 인것과 같이) 각 Goldstone boson은 gauge field W, Z 와 같은 질량을 가집니다. (앞으로 보일 것 입니다.)

¹⁰이 값은 beta decay를 통해 잘 측정되어 있었습니다.

Feynman-'t Hooft Gauge라 해도 gauge boson 사이 interaction은 Unitary gauge의 그것과 달라지지 않습니다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & ig \cos \theta_w [(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)W_\mu^+ W_\nu^- - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)Z_\mu W_\nu^- + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)Z_\mu W_\nu^+] \\
& + ie[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)W_\mu^+ W_\nu^- - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)A_\mu W_\nu^- + (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-)A_\mu W_\nu^+] \\
& + \frac{g^2}{2}(W_\mu^+ W_\mu^+ W_\nu^- W_\nu^- - W_\mu^+ W_\mu^- W_\nu^- W_\nu^+) + e^2(A_\mu W_\mu^+ A_\nu W_\nu^- - A_\mu A_\mu W_\nu^- W_\nu^+) \\
& + g^2 \cos^2 \theta_w (Z_\mu W_\mu^+ Z_\nu W_\nu^- - Z_\mu Z_\mu W_\nu^- W_\nu^+) \\
& + eg \cos \theta_w (W_\mu^+ W_\nu^- A_\mu Z_\nu + W_\nu^+ W_\mu^- A_\mu Z_\nu - 2W_\mu^+ W_\mu^- A_\nu Z_\nu)
\end{aligned} \tag{77}$$

대신, Higgs와의 interaction이 크게 바뀝니다. 여기서 $c(s)_w$ 는 각각 $\cos(\sin)\theta_w$ 이고, A' 와 Z' 는 각각 $\sqrt{g^2 + g'^2}A$, $\sqrt{g^2 + g'^2}Z$ 를 의미합니다. Double script를 피하기 위해 ϕ_0 와 ϕ^0 를 혼용했습니다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_H &= |\partial_\mu H - igW_\mu^a \tau^a H - \frac{ig'}{2}B_\mu H|^2 + \lambda v^2 H^\dagger H - \lambda(H^\dagger H)^2 \\
&= \left| \partial_\mu \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h + i\phi^0) \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2s_w c_w A'_\mu + (c_w^2 - s_w^2)Z'_\mu & \sqrt{2}gW_\mu^+ \\ \sqrt{2}gW_\mu^- & -Z'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\phi^0) \end{pmatrix} \right|^2 \\
&+ \lambda v^2 \left(\phi^+ \phi^- + \frac{1}{2}(v + h)^2 + \frac{1}{2}\phi_0^2 \right) - \lambda \left(\phi^+ \phi^- + \frac{1}{2}(v + h)^2 + \frac{1}{2}\phi_0^2 \right)^2 \\
&= \left| \partial_\mu \phi^+ - \frac{i}{2} \left((2s_w c_w A'_\mu + (c_w^2 - s_w^2)Z'_\mu) \phi^+ + gW_\mu^+ (v + h + i\phi^0) \right) \right|^2 \\
&+ \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu (h + i\phi^0) - \frac{i}{2} \left((\sqrt{2}gW_\mu^- \phi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}}Z'_\mu (v + h + i\phi^0)) \right) \right|^2 \\
&+ \frac{\lambda v^4}{4} - \frac{1}{2} 2\lambda v^2 h^2 - \lambda v h^3 - 2\lambda v h \phi^- \phi^+ - \lambda v h \phi_0^2 \\
&- \frac{\lambda}{4} h^4 - \frac{\lambda}{4} \phi_0^4 - \lambda (\phi^- \phi^+)^2 - \frac{\lambda}{2} h^2 \phi_0^2 - \lambda h^2 \phi^- \phi^+ - \lambda \phi_0^2 \phi^- \phi^+
\end{aligned}$$

위 항 중 gauge fixing term을 결정하는 2차항을 다음과 같이 확인할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}
& \left| \partial_\mu \phi^+ - \frac{i}{2} \left((2s_w c_w A'_\mu + (c_w^2 - s_w^2)Z'_\mu) \phi^+ + gW_\mu^+ (v + h + i\phi^0) \right) \right|^2 \\
&= (\partial_\mu \phi^+) (\partial^\mu \phi^-) + \frac{i}{2} (2s_w c_w A'_\mu + (c_w^2 - s_w^2)Z'_\mu) (\phi^- \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^-) \\
&+ \frac{i}{2} g v (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) + \frac{i}{2} g (h + \phi^0) (W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-) \\
&+ \frac{1}{4} |2s_w c_w A'_\mu \phi^+ + (c_w^2 - s_w^2)Z'_\mu \phi^+ + g(v + h + i\phi^0)W_\mu^+|^2
\end{aligned} \tag{78}$$

먼저 $\frac{igv}{2}(W_\mu^- \partial_\mu \phi^+ - W_\mu^+ \partial_\mu \phi^-)$ 를 제거하기 위해 다음과 같은 gauge fixing term을 사용합니다.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gf} &= -\frac{1}{\xi} \left(\partial^\mu W_\mu^+ - i\xi \frac{gv}{2} \phi^+ \right) \left(\partial^\mu W_\mu^- + i\xi \frac{gv}{2} \phi^- \right) \\
&= -\frac{1}{\xi} |\partial^\mu W_\mu^+|^2 + \frac{igv}{2} (\phi^+ \partial^\mu W_\mu^- - \phi^- \partial^\mu W_\mu^+) - \xi \left(\frac{gv}{2} \right)^2 \phi^+ \phi^-
\end{aligned} \tag{79}$$

이제 Feynman-'t Hooft gauge $\xi = 1$ 를 택하면 goldstone이었던 ϕ^+ 가 W 와 같은 mass $\frac{gv}{2}$ 를 가짐을 확인할 수 있습니다. 마찬가지로, 또 하나의 2차항 $\frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2}(\partial_\mu \phi_0)Z_\mu$ 은 추가적인 gauge fixing term $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu Z_\mu - \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2}\xi \phi_0)^2$ 을 통해 제거됩니다. 역시, $\xi = 1$ 이므로 ϕ_0 의 질량은 Z 의 그것과 같습니다.

Example: $\phi^+(p_1)\phi^-(p_2) \rightarrow \phi^+(p_3)\phi^-(p_4)$

이제 Goldstone equivalence theorem의 힘을 확인하기 위해 $\phi^+(p_1)\phi^-(p_2) \rightarrow \phi^+(p_3)\phi^-(p_4)$ amplitude를 확인해봅시다. 이에 대응하는 Feynman Rule은 Cheng & Li의 교재 [2]의 Appendix B를 참조해주세요.

먼저 A, Z boson이 매개하는 s -channel amplitude는 다음과 같습니다.¹¹

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left[(-ie)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{s} + \left(-ig \frac{1 - 2\sin^2 \theta_w}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{s - m_Z^2} \right] (p_2 - p_1)_\mu (p_4 - p_3)_\nu \\ &= i \left[\frac{e^2}{s} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{g^2}{s - m_Z^2} \right] (p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4) \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4) &= (p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3) \\ &= (2m_{\phi^\pm}^2 - t) - (2m_{\phi^\pm}^2 - u) = 4m_{\phi^\pm}^2 - s - 2t \end{aligned} \quad (81)$$

$$i\mathcal{M} \rightarrow -ig^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{s} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{s - m_Z^2} \right] (s + 2t - 4m_{\phi^\pm}^2) \quad (82)$$

A, Z boson이 매개하는 t -channel amplitude는 위 s -channel amplitude로부터 p_2 와 $-p_3$ 를 바꾸는 것으로 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \left[(-ie)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{t} + \left(-ig \frac{1 - 2\sin^2 \theta_w}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{-ig_{\mu\nu}}{t - m_Z^2} \right] (-p_3 - p_1)_\mu (p_4 + p_2)_\nu \\ &= -ig^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{t} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{t - m_Z^2} \right] (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4) \\ &= -ig^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{t} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{t - m_Z^2} \right] (2s + t - 4m_{\phi^\pm}^2) \end{aligned} \quad (83)$$

4-point amplitude는 다음과 같습니다.

$$i\mathcal{M} = -i \frac{2m_h^2}{v^2} \quad (84)$$

마지막으로 Higgs-exchange에 의한 amplitude는 다음과 같습니다.

$$i\mathcal{M} = \left(-i \frac{m_h^2}{v} \right)^2 \left(\frac{i}{s - m_h^2} + \frac{i}{t - m_h^2} \right) = -i \frac{m_h^4}{v^2} \left(\frac{1}{s - m_h^2} + \frac{1}{t - m_h^2} \right) \quad (85)$$

Amplitude를 계산해보면 느낄 수 있겠지만, 이 amplitude는 external polarization factor가 사라진 것만으로 Gauge boson의 그것에 비해 훨씬 간단하게 계산할 수 있습니다. Fermi constant $G_F = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{g^2}{m_W^2} = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}$ 를 이용해서 $\phi^+(p_1)\phi^-(p_2) \rightarrow \phi^+(p_3)\phi^-(p_4)$ process의 total amplitude를 정리하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}G_F} \mathcal{M} &= -4m_W^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{s} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{s - m_Z^2} \right] (s + 2t - 4m_{\phi^\pm}^2) \\ &\quad - 4m_W^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{t} + \left(\frac{2\cos^2 \theta_w - 1}{2\cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{t - m_Z^2} \right] (2s + t - 4m_{\phi^\pm}^2) \\ &\quad - 2m_h^2 - 2m_h^4 \left(\frac{1}{s - m_h^2} + \frac{1}{t - m_h^2} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

¹¹Propagator가 Unirary gauge의 그것과 달라졌음에 조심하세요! 일반적인 R_ξ gauge에서 gauge boson의 propagator는 $i\Pi^{\mu\nu} = \frac{i}{p^2 - m_V^2} \left(-\eta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi m_V^2} (1 - \xi) \right)$ 로, Goldstone equivalence theorem을 사용할 땐 이 점을 고려해야 합니다!

앞서 Gauge boson에 대해 계산했듯이, 위 amplitude의 High energy limit을 고려해 봅시다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}G_F}\mathcal{M} &= -4m_W^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{s} + \left(\frac{2 \cos^2 \theta_w - 1}{2 \cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{s} \left(1 + \frac{m_Z^2}{s} + \dots \right) \right] (s + 2t - 4m_W^2) \\
&\quad - 4m_W^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_w}{t} + \left(\frac{2 \cos^2 \theta_w - 1}{2 \cos \theta_w} \right)^2 \frac{1}{t} \left(1 + \frac{m_Z^2}{t} + \dots \right) \right] (2s + t - 4m_W^2) \\
&\quad - 2m_h^2 - 2m_h^4 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \dots \right) \\
&\approx -4m_W^2 \left[\sin^2 \theta_w + \left(\cos^2 \theta_w - 1 + \frac{1}{4} \sec^2 \theta_w \right) \left(1 + \frac{m_Z^2}{s} + \dots \right) \right] \frac{s + 2t}{s} \\
&\quad - 4m_W^2 \left[\sin^2 \theta_w + \left(\cos^2 \theta_w - 1 + \frac{1}{4} \sec^2 \theta_w \right) \left(1 + \frac{m_Z^2}{t} + \dots \right) \right] \frac{2s + t}{t} - 2m_h^2 \\
&\approx -m_W^2 \sec^2 \theta_w \left(\frac{s + 2t}{s} + \frac{2s + t}{t} \right) - 2m_h^2 \\
\mathcal{M} &\approx -\sqrt{2}G_F \left(2m_Z^2 \left(1 + \frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right) + 2m_h^2 \right) \tag{87}
\end{aligned}$$

이 결과는 앞서 계산한 $W_L W_L \rightarrow W_L W_L$ amplitude의 high energy limit Eq. (69)과 똑같습니다! 하지만 계산 과정은 훨씬 간단해졌죠.

이게 Goldstone equivalence theorem입니다. Gauge boson이 SSB를 통해 질량을 얻은 이론에 대해, Longitudinal polarization을 포함하는 amplitude의 high energy limit은 그 gauge boson을 대응하는 goldstone scalar로 대체한것과 똑같다는 것 입니다. 물론 이 간편함을 위해 $\xi \rightarrow \infty$ 가 아닌 다른 gauge를 사용해야 한다는 점, 그리고 goldstone에 대응하는 scalar들을 살려야 한다는 단점이 있습니다.

Informal Derivation

Goldstone Equivalence theorem의 증명의 핵심은, SSB theory를 기술하는 partition function의 high energy part에 대해, gauge boson의 longitudinal polarization이 기여하는 부분을 Goldstone boson으로 대체해도 거의 동일하다는 것 입니다.

$\xi = 1$ gauge에서 gauge fixing term에 의해 $\partial_\mu A^\mu = m_A \phi_2$ 가 강제됨을 생각해봅시다. Fourier space에서 위는 $p_\mu A^\mu = im_A \phi_2$ 로 해석할 수 있죠.

Ultra-relativistic limit에서, Longitudinal polarization vector는 사실상 p_μ 와 동일합니다.

$$\epsilon_\mu^L = \frac{p}{m_A} \left(1, 0, 0, \frac{E}{p} \right) = \frac{p}{m_A} \left(1, 0, 0, 1 + \frac{1}{2} \frac{m_A^2}{p^2} + \dots \right) \tag{88}$$

$$\approx \frac{p^\mu}{m_A} + \mathcal{O} \left(\frac{m_A^2}{p^2} \right) (0, \hat{p}) \tag{89}$$

고로,

$$\frac{p^\mu}{m_A} A_\mu^L(p) \approx \epsilon_\mu^L A_\mu^L(p) = A_L(p) \approx i\phi_2(p) \tag{90}$$

위는 고에너지 limit에서의 A_L 와 $i\phi_2$ 가 사실상 같음을 의미합니다. 즉, partition function 관점에서 A_L 를 $i\phi_2$ 로 대체해도 된다는 것 이죠.

$$A_\mu^L J^\mu = A^L \epsilon_\mu J^\mu \rightarrow \phi \epsilon_\mu J^\mu \approx \phi \frac{p_\mu}{m_A} J^\mu \tag{91}$$

A 양자장론 초 기초

현상론자들에 있어 양자장론을 배우는 주 목적은 amplitude와 그로부터 파생되는 observable들의 값을 구하는 것 일겁니다. 이 appendix에서는 양자장론이 대략적으로 어떤 것인지, 그리고 약간의 예산 방법에 대해 언급하고자 합니다.

Schrödinger 방정식을 생각해보면, 입자 (및 계)가 position \vec{x} 와 time t 에 의존하는 함수: field $\psi(\vec{x}, t)$ 를 통해 기술됨을 알 수 있습니다. 양자장론 역시 field의 거동을 기술하는 이론입니다. 그리고 field의 거동을 particle의 거동으로 해석하죠. 즉, 양자장론은 결국 입자들의 거동을 (양자역학적인 효과를 추가해) 어떻게 기술하는지에 대한 이론일 뿐입니다.

Exact하게 풀 수 있는 Schrödinger equation은 매우 한정적이라는 것을 알고 있을 것이라 생각합니다. 비슷하게, 주어진 potential에 대해 exact하게 풀 수 있는 양자장론은 매우 한정적입니다. QM에서 이러한 경우 perturbation theory를 써서 접근했듯이, 양자장론 역시 exact하게 풀 수 있는 경우: Free theory를 기반으로 (앞으로 interaction term이라 부를) potential term이 perturbation으로 다룰 수 있다고 가정합니다. 따라서, 먼저 양자장론에서 다루는 free theory에 대해 알아볼 필요가 있습니다.

질량 m , spin(s) 0을 가지는 real number-valued field ϕ 를 기술하는 free theory는 다음과 같습니다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi = -\frac{1}{2}\phi(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi \quad (92)$$

앞의 factor $1/2$ 는 Lagrangian(density)을 Hamiltonian(density)으로 Legendre transformation 시킨 다음, Hamiltonian 값이 energy (density)와 matching되도록 결정되었습니다.

Complex scalar field는 같은 질량을 가지는 두개의 real scalar field: $\text{Re } \phi$ 와 $\text{Im } \phi$ 로 구성되어있다 할 수 있습니다. $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{Re } \phi + i\text{Im } \phi)$ 이것의 free theory는 다음과 같습니다.

$$\mathcal{L} = -\phi^*(\square + m^2)\phi \quad (93)$$

Vector-valued field V^μ 는 $s = 1$ 을 가집니다. 질량 m 을 가지는 vector field를 기술하는 free theory는 다음과 같습니다.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu \equiv -\frac{1}{4}(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) + \frac{1}{2}m^2V_\mu V^\mu \quad (94)$$

(앞서 말한대로) perturbative하게 다룰 interaction term들은 세계 혹은 그 이상의 field들의 곱 및 작은 coefficient로 구성됩니다. 예를 들어, Scalar QED라는 이론¹²에서의 interaction term은 다음과 같습니다.

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = ieA^\mu [\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*] + e^2 \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \phi^* \phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi)^2 \quad (95)$$

각각의 interaction term은 다음과 같이 해석합니다.

$$ieA^\mu [\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*] \rightarrow \begin{array}{c} p_2 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \searrow \\ p_1 \end{array} = i \times ie \times (\pm ip_{1\mu} - \pm ip_{2\mu}) \quad (96)$$

$$e^2 \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \phi^* \phi \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = i \times e^2 \eta_{\mu\nu} \quad (97)$$

$$-\frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi)^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = i \times 4 \times \frac{\lambda}{4} \quad (98)$$

($i \times ie \times (\pm ip_{1\mu} - \pm ip_{2\mu})$ 의 부호는 맨 위에 나온대로 ingoing이냐 outgoing이냐가 결정합니다.)

이제 주어진 scattering process에 대해 Matrix element는 다음과 같이 계산할 수 있습니다.

¹²이 이론(model)은 complex scalar field ϕ 와 massless vector field A^μ 로 구성되는 이론입니다. 각각의 model마다 particle contents와 그들의 interaction의 형태가 다르며, 주어진 물리적 상황마다 적합한 model을 찾아 그것을 사용합니다.

1. 우선 incoming particle과 outgoing particle에 대응하는 점을 그린다.
2. 각각의 interaction term은 특정한 선들이 모이는 꼭짓점에 대응한다. incoming particle과 outgoing particle에서 선을 그어, 각각의 선이 interaction term이 허용하는 꼭짓점에서만 만나도록 선을 그린다.
3. Amplitude $i\mathcal{M}$ 는 각 꼭짓점에 대응하는 value들의 곱들이다.
4. incoming 및 outgoing particle 어디에도 연결되지 않는 선들은 propagator이다. 이들에 대응하는 factor들 역시 위 단계 3. 에서 곱해주어야 한다.

Scalar particle의 propagator는 $\frac{i}{p^2 - m^2}$ 입니다. 여기서 p 는 그 momentum conservation을 고려할 때 그 scalar particle이 가져야 하는 momentum입니다. Vector particle의 propagator에 대해서는 본문을 참조하세요.

B $2 \rightarrow n$

Scattering amplitude의 unitarity를 다루는 대부분의 문헌은 $2 \rightarrow 2$ process만을 다룹니다. 이걸로 만족하지 못하는 당신을 위해, 여기서는 $2 \rightarrow n$ scattering amplitude의 unitarity에 대해 살짝 이야기하도록 하겠습니다. 본문에서 Unitarity bound를 구할 때 초고에너지 scattering을 다룸으로서 effective하게 scattering과 관련된 모든 입자들을 massless species 처럼 취급한 바 있습니다. 마찬가지로, 여기에서는 처음부터 scattering에 involve된 입자들이 모두 massless하다고 가정하겠습니다.

Eq. (8)을 $2 \rightarrow n$ 으로 변형하고, massless COM frame을 가정하면 $\sqrt{s} = p/2$ 이므로 다음 식을 얻을 수 있습니다.

$$\text{Im } \mathcal{M}(i \rightarrow i) = s\sigma_{\text{tot}} = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im } a_j \geq s\sigma_{2 \rightarrow n} \quad (99)$$

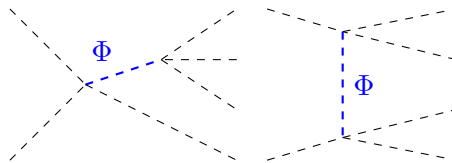
$\sigma_{2 \rightarrow n}$ 는 다음과 같습니다.

$$\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{8s} \int d\Pi (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathcal{M}(2 \rightarrow n) \quad (100)$$

$\mathcal{M}(2 \rightarrow n)$ 는 $2 \rightarrow n$ process와 관련된 matrix element로, 일반적으로는 outgoing particle의 momentum들에 의존합니다.

이 단계에서 중요한 simplication을 하고자 합니다. 앞서 $2 \rightarrow 2$ 에서도 scattering angle independent한 s -wave part (a_0)만 다뤘듯이, 여기서도 amplitude의 angle-independent한 part를 쓰는 겁니다. 이는 즉 $\mathcal{M}(2 \rightarrow n)$ 자리에 적절한 상수를 넣겠다는 것 이죠.

위 approach는 특히 적절한 cutoff가 있는 EFT에서 적절합니다. 예를 들어 질량 Λ 를 가지는 heavy particle Φ 가 있을 때 interaction 항으로 $\phi^3\Phi$ 이 존재하는 이론에서의 $2 \rightarrow 4$ scattering을 고려해봅시다. 이 amplitude와 연관된 diagram들은 크게 두 종류로 나눌 수 있습니다.



Λ 보다 낮은 energy scale에서의 amplitude는 대략 다음과 같이 거의 constant로 나오게 됩니다.

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{O}(10) \frac{\lambda^2}{\Lambda^2} \quad (101)$$

($\mathcal{O}(10)$ 는 서로 독립적인 diagram의 개수. 세어보니 대충 10개 정도 나옴.)

물론 이 approach는 heavy scale이 존재하는 경우에만 사용될 수 있으며, UV complete model에 대해 적용하기에는 어려움이 있습니다. 대신 UV completion이 불명확한 EFT를 다룰때 위 방법이 powerful할 수 있습니다.

위 simplication은 또한 scattering amplitude의 angle dependence를 무시할 수 있도록 하기에, $\mathcal{M} = 16\pi a_0$ 가 되도록 합니다. 따라서 앞서 사용한 inequality: $|a_0| \geq 1$ 가 여전히 성립합니다.

위 simplication을 적용하면 unitarity 문제는 결국 phase space integral V_n 를 계산하는 문제로 귀결됩니다.

$$\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{8s} \int d\Pi (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathcal{M}(2 \rightarrow n) \rightarrow \frac{g}{8s} \int d\Pi (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) = \frac{g}{8s} \frac{V_n}{(2\pi)^{3n-4}} \quad (102)$$

V_n 의 계산 과정은 다음과 같습니다. [4]

$$V_n = \delta^4(\Sigma p) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2E_i} \quad (103)$$

우선 분모의 E_i 는 다음 과정을 통해 제거할 수 있습니다. (이 식은 massive한 경우에도 성립합니다.)

$$\begin{aligned} \int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \Theta((p^0)_i) &= \int d^4 p_i \delta((p^0)_i^2 - m^2 - \vec{p}_i^2) \Theta((p^0)_i) \\ &= \int d^4 p_i \left(\frac{\delta((p^0)_i - \sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2})}{2\sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2}} - \frac{\delta((p^0)_i + \sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2})}{2\sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2}} \right) \Theta((p^0)_i) \end{aligned}$$

여기서 Heaviside theta 함수의 성질에 따라 p^0 가 음수인 part는 배제. $E_i \equiv \sqrt{m^2 + \vec{p}_i^2}$ 를 도입하면

$$\int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \Theta((p^0)_i) = \int d^3 p_i d p_i^0 \frac{\delta((p^0)_i - E_i)}{2E_i} \Theta((p^0)_i) = \int \frac{d^3 p_i}{2E_i} \Theta((p^0)_i) = \int \frac{d^3 p_i}{2E_i}$$

따라서 V_n 은 다음과 같이 기술될 수 있습니다.

$$\begin{aligned} V_n &= \int \delta^4(\Sigma p) \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \Theta((p^0)_i) = \int \delta^4(\Sigma p) \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2 - m^2) \Theta((p^0)_i) \\ &= \int \delta^4(P - \Sigma_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2) \Theta((p^0)_i) \quad (\text{massless}) \end{aligned} \quad (104)$$

이 V_n 은 n 개의 on-shell massless species들이 total 4-momentum P 를 나눠가질 수 있는 경우의 수에 비례하는 값이라 해석할 수 있습니다. V_n 은 mass dimension $2n - 4$ 을 가집니다. ($d^4 k$ 가 n 개 있으니 $4n$, $\delta((p^0)^2) = \frac{\delta(p^0)}{2p_0}$ 1개당 -2 , 이게 n 개 있으니 $-2n$, momentum conservation $\delta^4(\Sigma p)$ 에 의해 -4)

(Massless한 경우를 다루므로) V_n 이 가지는 유일한 energy scale은 CoM energy \sqrt{s} 입니다. 그러니, V_n 의 형태를 다음과 같이 기술할 수 있습니다.

$$V_n = a_n s^{n-2} \quad (105)$$

이제 a_2 를 구한 다음, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계를 찾아냄으로서 V_n 을 구할 수 있습니다. V_2 는 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} V_2 &= \int d^4 k_1 d^4 k_2 \delta(k_1^2) \delta(k_2^2) \Theta(k_1^0) \Theta(k_2^0) \delta^4(P - k_1 - k_2) \\ &= \int_0^\infty dk_1^0 dk_2^0 \int_0^\infty dr_1 dr_2 \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 r_1^2 r_2^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \delta(k_1^2) \delta(k_2^2) \delta^4(P - k_1 - k_2) \\ &= \int_0^\infty dk_1^0 dk_2^0 \int_0^\infty dr_1 dr_2 \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 \\ &\quad \frac{r_1^2 r_2^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{4r_1 r_2} \frac{\delta(k_1 - r_1) \delta(k_1 - r_2) \delta(P_0 - k_1^0 - k_2^0) \delta(r_1 - r_2) \delta(\theta_1 + \theta_2 - \pi) \delta(\phi_1 - \phi_2)}{r_1^2 \sin(\pi - \theta_2)} \end{aligned}$$

($\frac{\delta(r_1 - r_2) \delta(\theta_1 + \theta_2 - \pi) \delta(\phi_1 - \phi_2)}{r_1^2 \sin(\pi - \theta_2)}$ 에 대해서는 spherical coordinate에서의 dirac delta 함수를 찾아보세요.) $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ 이므로,

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dk_1^0 dk_2^0 \int_0^\infty dr_1 dr_2 \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 \\ &\quad \frac{r_2}{r_1} \sin \theta_1 \delta(k_1 - r_1) \delta(k_2 - r_2) \delta(P_0 - k_1^0 - k_2^0) \delta(r_1 - r_2) \delta(\theta_1 + \theta_2 - \pi) \delta(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty dk_1^0 \delta(P_0 - 2k_1^0) \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 = \pi \int_0^\infty dk_1^0 \delta(P_0 - 2k_1^0) = \frac{\pi}{2} \\ V_2 &= a_2 s^0 = \frac{\pi}{2} \rightarrow a_2 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

이제 V_n 과 V_{n+1} 사이의 관계를 구할 차례입니다. 둘 사이의 관계는 V_{n+1} 가 어찌보면 V_n 의 적분이라는 점으로부터 얻어집니다.

$$V_{n+1} = \int d^4 p_{n+1} \delta^4(P - p_{n+1} - \sum_{i=1}^n p_i) \delta(p_{n+1}^2) \Theta(p_{n+1}^0) \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2) \Theta((p^0)_i)$$

$P - p_{n+1} = Q$ 에 대해, $\int \delta^4(Q - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n d^4 p_i \delta(p_i^2) \Theta((p^0)_i) = V_n = a_n(Q^2)^{n-2}$ 입니다. (여기서의 mandelstam $s = Q^2$) Total momentum P 는 고정된 값이므로, $p_{n+1} = P - Q$ 로 치환하면,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \int d^4 Q \delta((P - Q)^2) \Theta((P - Q)^0) V_n(Q^2) \\ &= \int_{Q_{\min}^0}^{Q_{\max}^0} dQ^0 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \delta((P - Q)^2) \Theta(P^0 - Q^0) V_n(Q^2) \end{aligned}$$

$Q = (Q_0, \vec{Q})$ 이고 ($|\vec{Q}| = r$), COM momentum $P = (P^0, \vec{0})$ 이니 $(P - Q)^2 = (P^0 - Q^0)^2 - r^2$ 입니다. 따라서,

$$V_{n+1} = 4\pi \int_{Q_{\min}^0}^{Q_{\max}^0} dQ^0 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr r^2 \delta((P^0 - Q^0)^2 - r^2) \Theta(P^0 - Q^0) V_n(Q^2)$$

$\delta((P^0 - Q^0)^2 - r^2) \Theta(P^0 - Q^0) \rightarrow \frac{1}{2r} \delta((P^0 - Q^0) - r)$ 를 대입.

$$V_{n+1} = 2\pi \int_{Q_{\min}^0}^{Q_{\max}^0} dQ^0 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr r \delta((P^0 - Q^0) - r) V_n(Q^2)$$

V_n 의 변수 $Q^2 = (Q^0)^2 - r^2$ 이므로

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 2\pi \int_{Q_{\min}^0}^{Q_{\max}^0} dQ^0 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr r \delta(P^0 - Q^0 - r) V_n((Q^0)^2 - r^2) = 2\pi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr r V_n((P^0)^2 - 2P^0 r) \\ &= 2\pi a_n \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr r ((P^0)^2 - 2P^0 r)^{n-2} \end{aligned}$$

r 의 가능한 범위: r_{\min} 과 r_{\max} 에 대해, 이는 $n + 1$ 번째 입자의 3-momentum의 크기에 대응됩니다. 최소값은 0, 최대값은 나머지 모든 입자들이 반대방향으로 갈 때의 $P^0/2$ 입니다.

$$V_{n+1} = 2\pi a_n \int_0^{P^0/2} dr r ((P^0)^2 - 2P^0 r)^{n-2} = 2\pi a_n \frac{(P^0)^{2n-2}}{4n(n-1)} = \frac{\pi}{2n(n-1)} a_n s^{n-1} \quad (106)$$

$$= a_n \frac{\pi}{2n(n-1)} s^{(n+1)-2} = a_{n+1} s^{(n+1)-2} \quad (107)$$

따라서 $a_{n+1} = a_n \frac{\pi}{2n(n-1)}$ 및 $a_2 = \frac{\pi}{2}$ 이므로,

$$V_n = a_n s^{n-2} = \frac{(\pi/2)^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)} s^{n-2}$$

따라서, 다음과 같은 unitarity relation이 성립합니다.

$$\sigma_{2 \rightarrow n} \approx \frac{g}{8(2\pi)^{3n-4}} \frac{(\pi/2)^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)} s^{n-3} = g \frac{4\pi^3}{(4\pi)^{2n}} \frac{s^{n-3}}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)} \quad (108)$$

$$g \frac{4\pi^3}{(4\pi)^{2n}} \frac{s^{n-2}}{\Gamma(n)\Gamma(n-1)} \leq 16\pi \text{Im } a_0 \leq 16\pi \quad (109)$$

마지막은 $|\text{Im } a_0| \leq 1$ 이기 때문입니다.

References

- [1] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,” Cambridge University Press, 2014, ISBN 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0, Corrections: <https://schwartzqft.fas.harvard.edu/third-edition-corrections>
- [2] T. P. Cheng and L. F. Li, “Gauge Theory of Elementary Particle Physics,” Oxford University Press, 1984, ISBN 978-0-19-851961-4, 978-0-19-851961-4
- [3] B. W. Lee, C. Quigg and H. B. Thacker, “Weak Interactions at Very High-Energies: The Role of the Higgs Boson Mass,” *Phys. Rev. D* **16**, 1519 (1977) doi:10.1103/PhysRevD.16.1519
- [4] R. Kleiss, W. J. Stirling and S. D. Ellis, *Comput. Phys. Commun.* **40** (1986), 359 doi:10.1016/0010-4655(86)90119-0